ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ÉCOLE EUROPÉENNE DES AFFAIRES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON

Mathématiques II

(4 heures)

OPTION GÉNÉRALE seule entre { }

OPTION ÉCONOMIQUE - OPTION TECHNOLOGIQUE seule entre [ ]

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

L'objet du problème est une étude de gain associé à un jeu de pile ou face. La première partie permet d'établir quelques résultats liminaires d'analyse ; la seconde partie étudie la stratégie d'un joueur.

Dans tout le problème, on désigne par x un nombre réel appartenant à $]0,\ 1[$.

PARTIE I

1. Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $s(n,\ 0) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

   Calculer $s(n,\ 0)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $s(n,\ 1) = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + \cdots + (n+1)\,x^n$

[a) Déterminer la limite de la suite (nx^n) lorsque n tend vers $+\infty$.]

   b) Exprimer $(1-x)\ s(n,\ 1)$ à l'aide de $s(n,\ 0)$ et en déduire la limite de $s(n,\ 1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   c) Retrouver ce résultat à l'aide de la dérivation.

3. Plus généralement, pour tout couple $(n,\ r)$ de nombres entiers naturels, on pose : $s(n,\ r) = \sum_{k=0}^{n} C_{r+k}^{r}\ x^k$

   a) On suppose que n et r sont non nuls. On rappelle que, [si $r \leq n$: $C_n^r = \frac{n}{r}\,C_{n-1}^{r-1}$

   et que,] pour tout nombre entier naturel non nul k : $C_{r+k}^{r} - C_{r+k-1}^{r} = C_{k+r-1}^{r-1}$

   Déduire de ce dernier résultat que : $(1-x)\ s(n,\ r) = s(n,\ r-1) - C_{n+r}^{r}\ x^{n+1}$

   b) Déterminer les limites des suites de termes généraux $n^r\ x^n$ et $C_{n+r}^{r}\ x^n$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire par récurrence que, lorsque n tend vers $+\infty$, $s(n,\ r)$ tend vers la limite :

$$s(r) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

{ c) Soit y un nombre réel strictement positif. Déterminer suivant la valeur de y la nature de la série de terme général $(C_{r+k}^{r}\ y^k)$, le nombre r étant fixé. }

A SUIVRE

PARTIE II

On désigne par n et N des nombres entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet est $1-x$ et que la probabilité d'obtenir face est x. Les jets sont supposés indépendants.

On désigne enfin par S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers jets, par T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la $n^{\text{ième}}$ fois.

A) 1. Préciser la loi de S_n. Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

2. Préciser la loi de T_1. Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

3. L'objet de cette question est de calculer l'espérance et la variance de T_r.

Soient k un nombre entier naturel et r un nombre entier naturel non nul.

a) Montrer que l'événement $\{T_r = k+r\}$ est réalisé si et seulement si les événements $\{S_{k+r-1} = r-1\}$ et " pile est obtenu au $(k+r)^{\text{ième}}$ jet " le sont. En déduire la loi de T_r. Vérifier que la somme des probabilités des événements $\{T_r = k+r\}$, où k appartient à $\mathbf{N}$, est égale à 1.

b) Calculer l'espérance de T_r en utilisant la limite $s(r)$ de la suite $s(n,\ r)$ introduite dans la partie I.

c) Calculer de même $E(T_r^2) + E(T_r)$. En déduire la variance de T_r.

B) On décide que le jeu s'arrête dès que soit pile, soit face a été obtenu pour la $N^{\text{ième}}$ fois. Soit Z le nombre de jets nécessaires pour que le jeu s'arrête.

1. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre Z.

2. En utilisant une méthode analogue à celle de la question A) 3. a), déterminer, pour tout nombre entier naturel k, la probabilité pour que le jeu s'arrête au $(N+k)^{\text{ième}}$ jet, pile étant obtenu pour la $N^{\text{ième}}$ fois.

3. Donner la loi de probabilité de Z.

Options Eco - Techno

C) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1.

Un joueur parie de la façon suivante. Lors du $n^{\text{ième}}$ jet, il mise 1 franc.
- Si pile sort, il reçoit la somme λ (en francs), et il perd sa mise ;
- sinon, il perd sa mise.

On désigne par G_n la somme des profits et des pertes (celles-ci étant comptées négativement) du joueur après son $n^{\text{ième}}$ succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

1. Montrer que $G_1 = \lambda - T_1$ et calculer l'espérance de G_1.

2. Plus généralement, pour tout nombre entier naturel non nul r, exprimer G_r en fonction de T_r et en déduire l'espérance de G_r.

3. Étudier la limite de $E(G_r)$ lorsque r tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

Option Générale

C) Soient a un nombre réel strictement positif et λ un nombre réel strictement supérieur à 1.

Un joueur parie de la façon suivante. Lors du $n^{\text{ième}}$ jet, il mise la somme a^{n-1} (en francs).

- Si pile sort, il reçoit la somme λa^{n-1} et il perd sa mise ;
- sinon, il perd sa mise.

On désigne par G_n la somme des profits et des pertes (celles-ci étant comptées négativement) du joueur après son $n^{\text{ième}}$ succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

1. Dans cette question, on suppose que $a = 1$ (le joueur parie donc un franc à chaque jet).

a) Exprimer G_1 en fonction de T_1 et calculer l'espérance de G_1.

b) Plus généralement, pour tout nombre entier naturel non nul r, exprimer G_r en fonction de T_r et en déduire l'espérance de G_r.

2. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a^{T_1}.

Déterminer a en fonction de λ de telle sorte que G_1 ne dépende pas des valeurs prises par T_1.

Dans le cas général, étudier l'existence des espérances de a^{T_1} et de G_1. Lorsque ces espérances existent, les calculer.

b) Exprimer G_2 en fonction de a^{T_1} et de a^{T_2}. Étudier l'existence et déterminer la valeur de l'espérance de G_2.

c) Soit, plus généralement, r un nombre entier naturel non nul. En utilisant la même méthode, étudier l'existence de l'espérance de G_r. Montrer que, si cette espérance existe, alors :

$$E(G_r) = \frac{1}{a-1}\left[1 - \frac{a^r(1-x)^r}{(1-ax)^r}\right][1-\lambda(1-x)]$$

d) En déduire, si elles existent, la limite de $E(G_r)$ lorsque r tend vers $+\infty$ et la limite de $E(G_r)$ lorsque a tend vers 1 par valeurs supérieures.

3. Dans cette question, on suppose que $a < 1$.

a) Les conditions d'existence de l'espérance de a^{T_r} sont-elles vérifiées ? La formule de la question 2. c) reste-t-elle valable ? En déduire la limite de $E(G_r)$ lorsque r tend vers $+\infty$.

b) Soit g_k la somme des profits et des pertes réalisés lors du $k^{\text{ième}}$ jet. Exprimer g_k en fonction d'une variable de Bernoulli associée au $k^{\text{ième}}$ jet.

c) Soit H_m le gain (algébrique) réalisé après m jets. Calculer l'espérance de H_m et la limite de $E(H_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

FIN